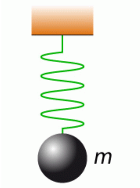


MECANIQUE DU SOLIDE

Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

1 – LIMITES D'ETUDE

Limite 1 : on se place dans la cadre de la mécanique classique, celle des systèmes matériels dont la vitesse est faible face à celle de la lumière ($v < 0{,}6 \cdot c$).

Limite 2 : On se place toujours dans un référentiel galiléen.

2 – EXPRESSION VECTORIELLE DU PFD

La dynamique d'un système matériel est régie par deux théorèmes qui traduisent la seconde loi de Newton.

Théorème de la résultante dynamique

$$\boxed{\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \cdot \overrightarrow{a_G(t)}}$$

avec

$\sum \overrightarrow{F_{ext}}$	Somme des forces extérieures appliquées au solide	(N)
m	Masse du solide (constante)	(kg)
$\overrightarrow{a_G(t)}$	Accélération (absolue) du centre de gravité du solide	$(m \cdot s^{-2})$

- Le terme $m \cdot \overrightarrow{a_G(t)}$ s'appelle la résultante dynamique : $\overrightarrow{R_D} = m \cdot \overrightarrow{a_G(t)}$
- Si l'accélération est nulle, alors on a $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$ (théorème de la résultante du PFS qui est un cas particulier du PFD).

Théorème du moment dynamique

$$\boxed{\sum M_G\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = I_{G,Z} \cdot \alpha(t)}$$

avec

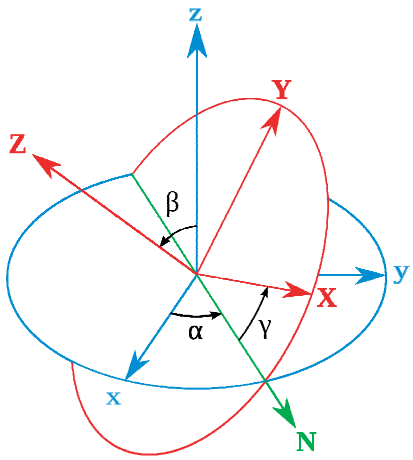
$\sum M_G\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)$	Somme des moments en *G* des forces extérieures appliquées au solide	$(N \cdot m)$
$I_{G,Z}$	Moment d'inertie du solide sur l'axe $(G,\vec{z})$	$(kg \cdot m^2)$
$\alpha(t)$	Accélération angulaire sur l'axe $(G,\vec{z})$	$(rad \cdot s^{-2})$

- G est le centre de gravité du système étudié (on dit aussi centre d'inertie).
- Le terme $I_{G,Z} \cdot \alpha(t)$ s'appelle le moment dynamique : $M_D = I_{G,Z} \cdot \alpha(t)$
- Si l'accélération angulaire est nulle, alors on a $\sum M_G\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = 0$ (il s'agit du théorème du moment du PFS qui est un cas particulier du PFD).

L'accélération angulaire a été considérée sur l'axe $(G,\vec{z})$ uniquement. Or, un solide peut dans le cas général tourner autour des trois axes (angles α, β et γ sur la figure ci-contre).

Ce faisant, l'accélération angulaire d'un solide (1) par rapport à un solide (0) est un vecteur noté généralement $\overrightarrow{\alpha_{1/0}}$ avec :

$$\overrightarrow{\alpha_{1/0}} \begin{vmatrix} \alpha_{x1/0} \\ \alpha_{y1/0} \\ \alpha_{y1/0} \end{vmatrix}$$



Les moments de force étant eux aussi vectoriels, le moment d'inertie est alors représenté par une *matrice* dite « d'inertie » ; elle est notée $\overline{\overline{I_G}}$:

$$\overline{\overline{I_G}} = \begin{vmatrix} I_{Gxx} & I_{Gxy} & I_{Gxz} \\ I_{Gyx} & I_{Gyy} & I_{Gyz} \\ I_{Gzx} & I_{Gxx} & I_{Gzz} \end{vmatrix}$$

La formulation générale du PFD en rotation est donc : $\sum \overrightarrow{M_G\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)} = \overline{\overline{I_G}} \cdot \overrightarrow{\alpha_{1/0}}$

Notons tout de suite que le bagage mathématique nécessaire pour traiter des problèmes de ce genre n'est pas celui du niveau de Première, ni d'ailleurs de Terminale. Aussi, pour les problèmes traités sur le papier, ***nous nous limiterons toujours au cas particulier d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.***

3 – EXPRESSION TORSORIELLE DU PFD

Rappel : *le torseur est une entité mathématique contenant deux vecteurs. Il va ainsi permettre de résumer en une seule expression les théorèmes de la résultante dynamique et du moment dynamique :*

$$\boxed{\sum \overbrace{\{T_{ext}\}}^{\textbf{torseur}} = \begin{Bmatrix} \overbrace{\overrightarrow{R_D}}^{\textbf{vecteur}} \\ \underbrace{\overrightarrow{\delta_D}}_{\textbf{vecteur}} \end{Bmatrix}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overbrace{\overrightarrow{R_D} = m \cdot \overrightarrow{a_G(t)}}^{\textbf{vecteur}} \\ \underbrace{\overrightarrow{\delta_D} = \overline{\overline{I_G}} \cdot \overrightarrow{\alpha_{1/0}}}_{\textbf{vecteur}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overbrace{\overrightarrow{R_D} = m \cdot \overrightarrow{a_G(t)}}^{\textbf{vecteur}} \\ \underbrace{\delta_D = I_{GZ} \cdot \alpha_{z1/0}}_{\textbf{scalaire}} \end{cases}$$

Outre l'aspect « écriture », l'approche torsorielle est très puissante et adaptée pour résoudre les problèmes complexes (tridimensionnels).

4 – METHODE PRATIQUE POUR RESOUDRE UN PROBLEME DE DYNAMIQUE

1) **Lire** le problème et bien identifier ce que l'on connaît et ce que l'on cherche (efforts, géométrie, …).
2) **Définir** clairement le système isolé (tout ou partie du système)
   - ☞ *on peut utiliser le graphe des liaisons qui aide à clarifier les choses.*
3) **Réaliser** le **B**ilan des **A**ctions **M**écaniques **E**xtérieures (BAME) subit par le système isolé
   - ☞ *sous forme algébrique, vectorielle ou torsorielle selon l'approche du problème.*
   - ☞ *Utiliser le Principe des Actions Mutuelles (PAM) si nécessaire (ce qui enlève des inconnues).*
4) **Appliquer** le PFD (qui donnera au mieux six équations algébriques).
5) **Résoudre** le système d'équations si possible.
6) **Renouveler** les étapes 2 à 6 si le nombre d'équations est inférieur au nombre d'inconnues.

5 – CHOIX DE LA TECHNIQUE

Graphique ? Analytique ? Torseur ? Si elle n'est pas imposée, laquelle choisir ? Bien que par principe toutes les techniques fonctionnent pour tous les problèmes, l'une est souvent mieux adaptée qu'une autre ; tout dépend de la nature et de la **complexité du problème** à traiter :

Constructions graphiques	**Calculs analytiques**	**Calculs torsoriels**
- Problème de statique uniquement - Problème plan - Que des glisseurs	- Problème plan - Glisseurs parallèles	- Tout problème (2D, 3D) - Glisseurs, couples